

Mathematica による最適化問題の可視化に関する実践

山口健二

お茶の水女子大学 附属高等学校

Practice for Visualization of Optimization Problems by Mathematica

Kenji YAMAGUCHI

Ochanomizu University; Senior High School

In this report, we used lesson materials to support students' understanding by visualizing mathematical aspects using Mathematica for the content studied in the university's economic department. In this practice, I focused on the law of supply and demand and optimization problem. In previous report, the problems of creating teaching materials were that the variables were huge and it was difficult for the students to input, and that the explanation for the displayed graph was insufficient. In this practice, I aimed at improvement. As a result, new problems were also found.

keywords : Mathematics, Business Mathematics, Visualization, Mathematica, Wolfram CDF Player

はじめに

経済学部は文系か理系か？と問われれば、文系という人が多いだろう。確かに、私立大学では経済学部の受験科目としては、外国語、国語、そして地歴公民または数学の3科目というのが一般的である。ということは、数学がまったくできない学生が経済学部が存在する可能性があるということである。しかし、経済・経営分野の専門科目を学ぶ上では、数学は避けて通ることはできない。例えば、需要と供給の関係を考えるときは、関数が必要である。複利計算を考える際には、指数・対数が必要であるし、貯蓄やローン返済に関しては、等比数列を使って考えることが多い。そして利潤の最大化を求めるのであれば、微分が必要であるのは言うまでもない。ここまでは高校数学の範囲であるが、さらには、効用最大化問題に対しては、偏微分やそれを利用したラグランジェの未定乗数法が必要であり、大規模の数値データに関しては行列演算といった大学数学の知識と技術が必要になる。

しかし、これまで数学を苦手としている学生に対して、これらの内容を淡々と教えていくと、うまく伝わらない可能性が高い。その理由として、使用される変

数が一体何を表している別の変数とどのような関係があるのか理解できること、そしてそれを二次元や三次元としてイメージできること、という壁があるからである。実際、その課題を解決しようとする試みも行われており(白田,2009;白田,2012)、2020年から順次実施される学習指導要領においても理数教育充実が求められることも合わせて、今後も数学的学力の向上が求められるのは当然といえる。特に、数学においては、高等学校学習指導要領(平成30年告示)の各科目にわたる指導計画の作成と内容の取扱いにおいて、「各科目の指導に当たっては、必要に応じて、コンピュータや情報通信ネットワークなどを適切に活用し、学習の効果を高めるようにすること」との記載もあり、高校以上の数学については、ICTを適切に活用した数学教育が求められている。

本報告では、Mathematicaを使って需要と供給や最適化問題といった、大学の経営学科で学ぶ内容に対して、数学的側面を可視化することによって、生徒の理解を支援する授業教材の作成を行い、それを実践した報告を行う。昨年度の報告(山口2018)では、微分:1変数関数の導関数の算出、関数・接線のグラフィックス、偏微分:2変数関数の導関数の算出、関数・接

平面のグラフィックス、多変数関数の制約付き最適化問題:目的関数と制約関数のグラフィックスとアニメーション、経過利子付債券の問題:購入債権の現在価値の変化といったものを題材としていた。今回は利潤の最大化や費用の最小化といった最適化問題に焦点を当てて教材を作成した。前回の報告の最後で、変数が膨大になり学生が入力するのが大変なことや、表示したグラフに対する説明が不足していたことを問題点としてあげた。本実践では、それらを踏まえた教材作りを目指した。

Mathematica と Wolfram CDF Player による教材作成

Wolfram社は、「Mathematica」という数式処理システムを開発している。MathematicaではWolfram言語とよばれるプログラミング言語で数式を記述することで、計算結果が得られたり、グラフを生成できたりする。Mathematicaは非常に高性能なソフトウェアであるがアカデミックパッケージであっても高価格なので、学校単位での導入は予算の面で難しいことが多い。近年登場した小型ボードコンピュータ「Raspberry Pi」であれば、Mathematicaを無償で利用できるようになったが、やはり学校単位でRaspberry Piおよび動作に必要な周辺機器を用意する手間を考えると、短時間で環境を準備するのは難しいのが現状である。したがって、本授業教材の開発については、教員のみがMathematicaを使用できる環境を想定する。よって、学生には、無料のWolfram CDF Player(以下CDF Playerとする)*1を使うことで、教員が事前にMathematicaで作成した教材を利用することとする。CDF Playerの特徴として、閲覧中の3次元グラフィックスの拡大・縮小、回転ができたり、数式中の変数を自動で変化させることによってグラフィックスのアニメーションができたりできる(山本,2011)。さらに、Mathematicaの機能の一つであるManipulateを使用することで、変数の数値を任意に変更することが可能である。

Mathematicaを使って、グラフを作成する場合、最も一般的なのは、Plotコマンドを使用する方法である。例えば、需要関数が $P = -2Q + 40$ 、供給関数が $P = Q + 10$ であったとする。2つの関数の交点が均衡点を可視化したい場合、次のように入力する(Figure1)。

また、CalloutコマンドやEpilogオプションの

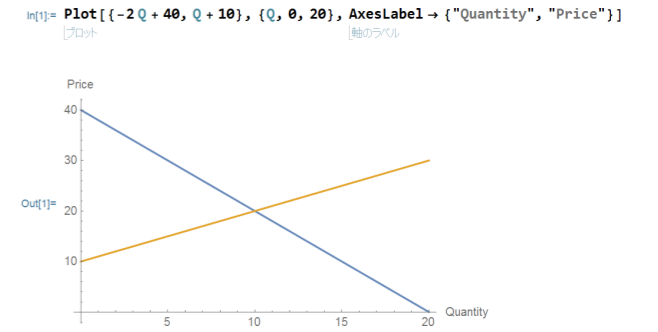


Figure1 Plot コマンドによるグラフィック 1

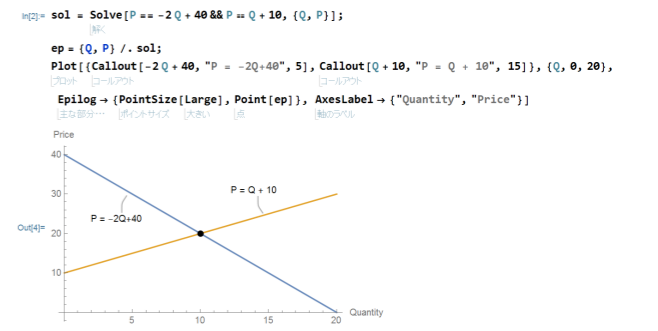


Figure2 Plot コマンドによるグラフィック 2

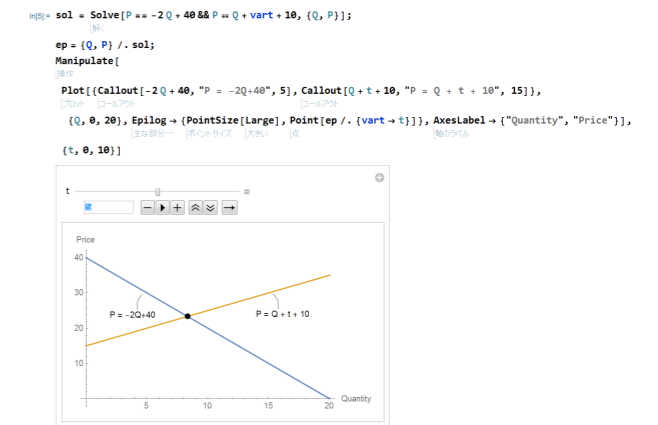


Figure3 Manipulate によるアニメーション

指定により、関数や交点を明瞭にすることができる(Figure2)

さらに、財1単位あたり税金tを課せられた場合を考える。Manipulateコマンドを組み合わせることで、tに数値を変化させることができ、グラフィックスのアニメーションが可能となる(Figure3)。

ManipulateはCDF Playerであっても利用可能である。よって、教員がこれらのコマンドを使って教材

を作成することで、変数が変動するグラフを作成することができる。

教材作成

今回、作成した教材のうちのいくつかをここで紹介する。使用した例題は、経済学部の学生が用いる教科書や参考書のものを使用している(尾山,2013;白田,2009)。

- ・需要曲線と供給曲線の交点の可視化 (Figure4)

需要関数と供給関数が以下のように与えられた。

$$P + Q^2 + 6Q - 800 = 0$$

$$P = Q^2 + 4Q + 400 = 0$$

このとき、均衡価格と均衡取引量を求めよ。

- ・財1 単位あたり税金 t を課せられた場合に均衡点が変わるグラフィックス (Figure5)

上記の問題において、財1 単位あたり税金 t を課せられた場合の均衡価格と均衡取引量を求めよ。ただし、 $0 \leq t \leq 100$ とする。

- ・最適化問題：多変数関数の最適化問題 (Figure6、Figure7)

1 階の条件を使って次の最大化問題を解け。ただし、

$$x \geq 0, y \geq 0 \text{ とする。}$$

$$f(x,y) = x^{1/3} y^{1/3} - x - y$$

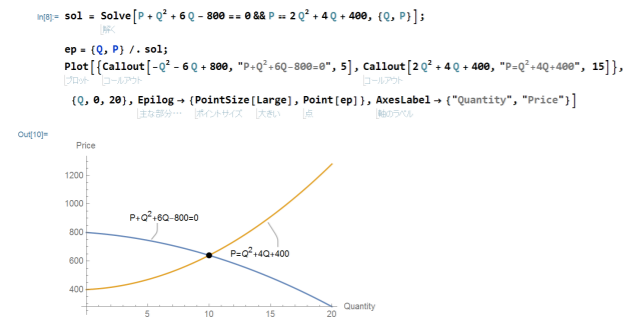


Figure4 需要曲線と供給曲線の交点の可視化

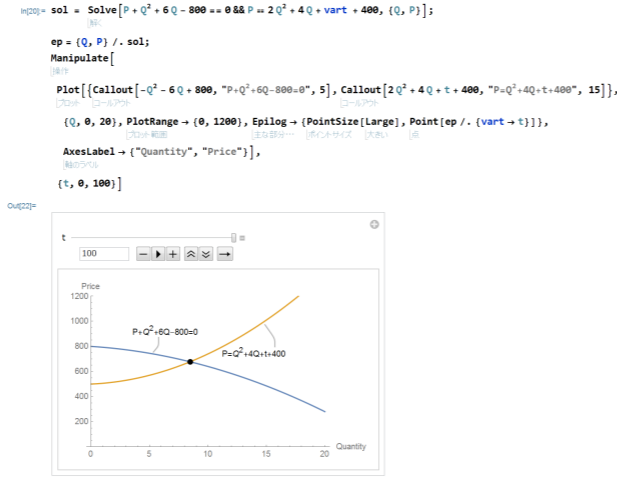


Figure5 財1 単位あたり税金 t を課せられた場合に均衡点が変わるグラフィックス

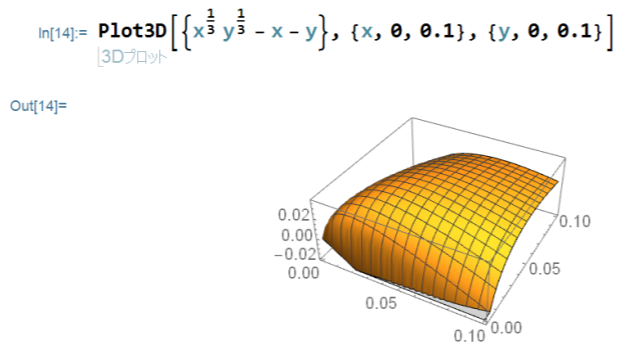


Figure6 多変数関数の最適化問題

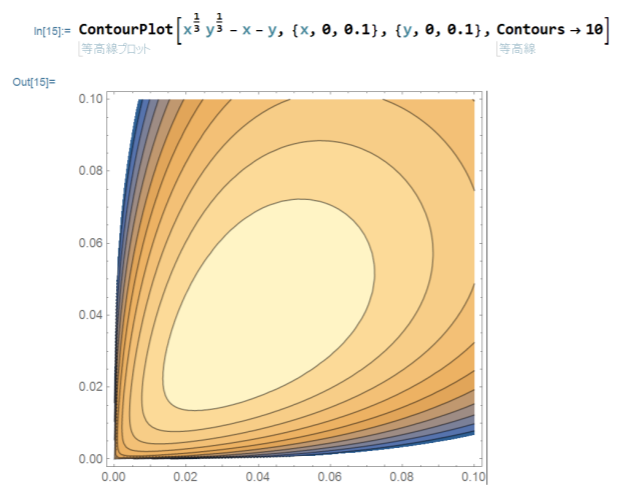


Figure7 多変数関数の最適化問題 (ContourPlot による等高線表示)

実践とまとめ

作成した教材を、学習院大学の経営学部経営学科を対象とした授業で実施展開した。今回も、Mathematica と Wolfram CDF Player による教材作成と実践について報告したが、また新たな課題も見つかった。ひとつは、変数が3つ以上になると、可視化が難しくなることである。Mathematica では、定数や変数を変更することが可能だが、表示する画面自体は2次元なので3変数でも回転などをしないと全容を掴むのが難しいことが多々あった。もう一つは、一般化された関数は可視化ができないということである。例えば、「利潤 $\Pi(Q)$ に最大値が存在するとしたら、その点において限界収入と限界費用が等しくなることを示せ」という問題があったときに、 $\Pi(Q)$ の関数が明示されていないため、可視化することができない。このような可視化が難しい問題に対して、どのような学習教材の作成が可能か今後検討していきたい。

注

*1 Wolfram CDF Player <https://www.wolfram.com/cdf-player/>

参考文献

Cliff Hastings・Kelvin Mischo・Michael Morrison (2018) Wolfram Media, Inc. ウルフラム・リサーチ訳「ハンズ・オン・スタート Mathematica - Wolfram 言語によるプログラミング」丸善出版。
 西村和雄 (1982)「経済数学早わかり」日本評論社。
 尾山大輔・安田洋祐 (2013)「改訂版 経済学で出る数学-高校数学からきちんと攻める」日本評論社。
 佐々木重雄 (2013)「高校・中学数学における関数および図形の理解を促すソフトウェア教材カタログの試作」情報処理学会第75回全国大会、4-461-462。
 山口健二 (2018)「Mathematica を使った経営数学の学習教材の作成と実践」高等教育と学生支援 (第8巻) お茶の水女子大学紀要、26-30。
 山本修一 (2011)「Mathematica を活用する数学教材とその検証 (数式処理と教育)」京都大学数理解析研究所講義録 2011、1735:115-126。
 白田由香利 (2009)「悩める学生のための経済・経営数学入門-3つの解法テクニックで数学アレルギーを克服!-」共立出版。
 白田由香利・橋本隆子・飯高茂 (2012)「感じて理解する数学入門-身近な事例を動かして学ぶ-」オライリージャパン。

2019年3月17日 受稿